
随机事件与概率定义

第 1 讲 · 概率论与数理统计

复旦大学经济学院 ECON130001

上一讲我们看到了什么

绪论留下的印象

- 同月同日生、换门问题——直觉在概率面前经常失灵
- 布丰投针把 π 和随机投掷连了起来
- 垃圾邮件识别、ChatGPT 生成下一个词，背后都是概率

绪论留下的问题

那几个例子都在算某件事「有多可能」。可我们连「**某件事**」**到底指什么**都还没说清楚——「至少有两人同月同日生」是一件事，还是很多件事？

不把这个说清楚，后面所有计算都无从谈起。

为什么需要这一讲

背景 2005 年 8 月，密西西比州帕斯卡古拉。Leonard 一家的房子离海不到两百米。卡特里娜飓风正面登陆，狂风和风暴潮几乎同时砸过来。灾后清点，损失超过 13 万美元。他们买了家庭财产险：**保风灾，不保水灾**。

转折 他们和律师做了一件看起来完全合理的事：请人估出损失里「纯粹由风造成」的部分约 4.7 万美元，只申请这一部分。**一审法院也认可这个思路**。

第五巡回上诉法院推翻了它。保单里有一句：即便另一风险同时或先后促成该损失，本除外条款依然适用。按这句话，风和水共同造成的损害**整体**被排除。最终实付 **1661.17 美元**。

问题 合同白纸黑字，两造都是专业人士，读出来的结论却差了两个数量级。问题出在哪？**「赔什么」这件事，能不能写成一种不依赖阅读理解的东西？**

来源

Leonard v. Nationwide Mutual Insurance Co., 499 F.3d 419 (5th Cir. 2007). caselaw.findlaw.com | 访问日期 2026-07-31

本讲学习目标

- ① 把一句关于不确定性的话**翻译成集合**：样本空间、事件、必然与不可能
- ② 对事件做**运算与化简**：并、交、差、补、互斥、对立，以及 De Morgan 律
- ③ 陈述概率的**三条公理**，并用由它推出的性质完成计算

为何学习随机事件的「数学语言」？

- 我们每天都在与不确定性打交道：
 - 明天某支股票是涨是跌？
 - 新推出的产品能否成为爆款？
 - AI 模型给出的下一个词是什么？

概率论是什么

一套**精确、无歧义地描述和分析不确定性**的语言。

本讲目标

学习这门「语言」的语法规则——用集合论来描述随机事件及其关系。这是构建所有概率模型、金融模型乃至 AI 算法的第一步。

随机事件

为了研究随机现象，要对客观事物进行观察，观察的过程称为**试验**。概率论研究的试验有以下特点：

- 在相同的条件下试验**可以重复**进行
- 每次试验的结果具有**多种可能**，且在试验之前可以明确所有可能结果
- 在每次试验之前**不能准确预言**该次试验将出现哪一种结果

试验的结果及其组合称为**随机事件**：

- 不能分解的最简单的随机事件称为**基本事件**
- 基本事件组合为**复合事件**

如何用数学语言描述随机事件？

样本空间

试验所有可能的结果（事件）的集合称为**样本空间**，记为 Ω 。

可以用集合论的语言描述随机事件：

- 集合中的每个元素 ω 构成的单点集 $\{\omega\}$ 就是**基本事件**
- 集合的**任意子集**是随机事件
- 样本空间全集 Ω 也是一个事件，称为**必然事件**
- 空集 $\emptyset$ 也是一个事件，称为**不可能事件**

思考：现代经济与 AI 中的样本空间

- **金融市场**：某支股票明天可能的价格变化， $\Omega = \{\text{上涨, 下跌, 平盘}\}$
- **信用评估**：评估一个贷款申请人， $\Omega = \{\text{违约, 不违约}\}$
- **AI 自动驾驶**：车辆在路口的下一个决策， $\Omega = \{\text{直行, 左转, 右转, 停车等待}\}$

样本空间与事件

例：掷骰子，样本空间如何表示？掷得偶数、掷得大于 2 的数字这两个事件如何表示？

样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

偶数事件 $A = \{2, 4, 6\}$ 大于 2 事件 $B = \{3, 4, 5, 6\}$

例：连续掷两次骰子，样本空间如何表示？两次数之和大于 6 这一事件如何表示？

样本空间 $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

两次数之和大于 6 事件 $A = \{(1, 6), (2, 5), (2, 6), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

思考：样本空间 Ω 和事件 A 分别有多少个元素？

接下来

到这里，我们已经能把**单个事件**写清楚了。

但现实里的问题从来不是单个事件。「信用分低**且**会违约」「至少有一家银行出问题」「不触发任何一条排除条款」——这些都是把几个事件**组合**起来的说法。

接下来八页，我们给这些「组合」一套精确的运算规则。

事件间的关系及运算

事件的包含

- 如果事件 A 发生**必然导致**事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A \subset B$
 - $A \subset B \iff \forall \omega \in A, \omega \in B$
 - $\forall A, \emptyset \subset A \subset \Omega$

例：掷一次骰子，事件 A 为得到偶数，事件 B 为得到大于 1 的数字

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 因此事件 B 包含事件 A, 即 $A \subset B$ 。

事件间的关系及运算

事件的相等

- 如果事件 A 包含事件 B ，事件 B 也包含事件 A ，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A = B$
 - $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$
 - 事件 A 和 B 中的元素完全相同

这条定义有什么用

双向包含是本讲证明所有等式的标准手法——包括马上要见到的 De Morgan 律。要证两个事件相等，就证互相包含。

事件间的关系及运算

和事件（事件的并）

- 两个事件 A 、 B 中**至少有一个**发生，即「 A 或 B 」，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$
 - $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$
 - 交换律 $A \cup B = B \cup A$
 - 结合律 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 - 如果 $A \subset B$ ，则 $A \cup B = B$
 - $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$
- ***可列并**：可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和也是一个事件，表示所有事件中至少有一件发生，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

事件间的关系及运算

积事件（事件的交）

- 事件 A 和 B **同时发生**，即「 A 且 B 」，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或 AB
 - $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$
 - 交换律 $A \cap B = B \cap A$ 结合律 $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 - 如果 $A \subset B$ ，则 $A \cap B = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$
- ***可列交**：可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的交也是一个事件，表示所有事件都发生，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明思路

双向包含：任取 ω 属于左边，推出它属于右边；再反过来。

事件间的关系及运算

事件的差

- 事件 A 发生而事件 B 不发生，称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$
 - $A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$

例：掷一次骰子，事件 A 为得到偶数，事件 B 为得到大于 3 的数字

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 故 $A - B = \{2\}$ 。

事件间的关系及运算

互斥事件

- 如果事件 A 和事件 B **不可能同时发生**，即 $A \cap B = \emptyset$ ，则称 A 和 B 是**互斥事件**，或称互不相容
- 如果事件 $A_1, \dots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 + \dots + A_n = \Omega$ ，则称 $A_1, \dots, A_n$ 构成样本空间的**完备事件组**

例：掷一次骰子，事件 A 为得到偶数，事件 B 为得到奇数

$A \cap B = \emptyset$ ，因此 A 和 B 是互斥事件。又因为 $A \cup B = \Omega$ ，故 A, B 构成一个完备事件组。

这个概念后面要用

完备事件组眼下只是个名词。本讲后面的两个案例——银行贷款的五级分类、分类器的混淆矩阵——用的都是它。

事件间的关系及运算

对立事件（逆事件）

- 事件 A 的对立事件是样本空间中所有**不属于** A 的结果组成的集合，记为 $\bar{A}$
 - $\bar{\bar{A}} = A, \bar{\emptyset} = \Omega, \overline{\Omega} = \emptyset$
 - $A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega$
 - $A - B = A \cap \bar{B}$
 - $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

例：掷一次骰子，事件 A 为得到偶数

$A = \{2, 4, 6\}, \bar{A} = \{1, 3, 5\}$ ，显然 A 的对立事件为掷得奇数。

事件间的关系及运算

De Morgan 律 (对偶律)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

用文字读：「并非至少一个发生」 = 「每一个都不发生」；「并非全都发生」 = 「至少一个不发生」。

证明思路

元素法： $\omega \in \overline{A \cup B} \iff \omega \notin A \cup B \iff \omega \notin A \text{ 且 } \omega \notin B \iff \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$ 。每一步都是等价变形，反向自动成立。

例：掷一次骰子，事件 A 为 {1, 2, 3}，事件 B 为 {2, 3, 4}

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，因此 $\overline{A \cup B} = \{5, 6\}$ 。

而 $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$ ， $\overline{B} = \{1, 5, 6\}$ ，所以 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5, 6\}$ 。验证了对偶律。

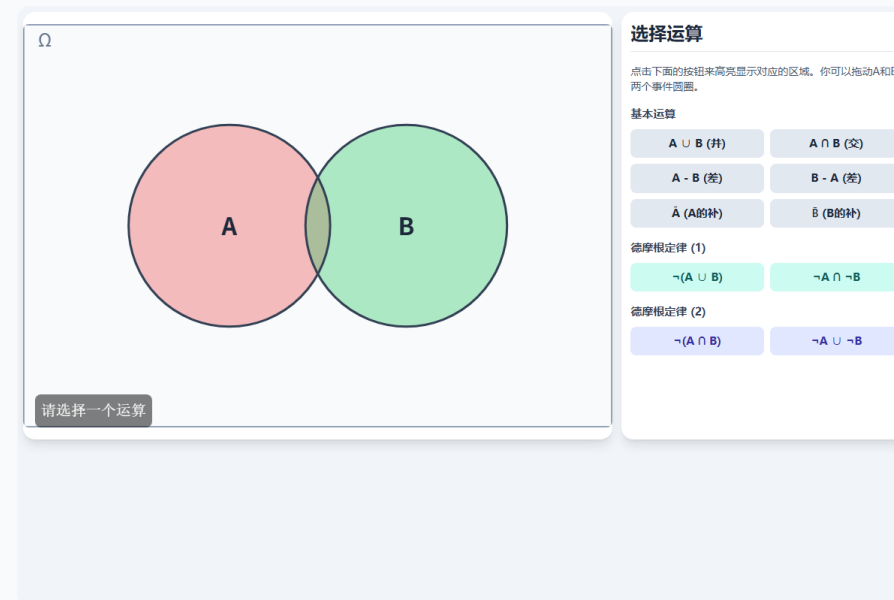
交互：事件运算演示器

看什么

依次点「并」「交」「差」「补」，观察阴影区域如何变化。

重点

切到两个 **De Morgan** 按钮，看刚才表决的那两块阴影是否**完全重合**。



交互演示：点选运算，观察韦恩图阴影区域如何变化，并验证 De Morgan 律

https://fin-tech.fun/courseware/probability-statistics-undergrad/toolkit/venn_diagram.html

小结

- **事件就是集合**，事件运算就是集合运算。翻译对了，问题就一半解决了
- **互斥** = 交为空；**对立** = 互斥且并为全集。对立比互斥强
- **差可以化成交**： $A - B = A \cap \overline{B}$
- **De Morgan 律**让「至少一个」和「并非全都」互相转换——正面难算时就翻到反面

事件运算的应用：金融风险管理

场景：银行的信用卡审批

定义两个基本事件： A = 申请人的信用评分低于 650 分； B = 该申请人在未来一年内发生违约。

风险经理如何运用事件运算？

- $A \cap B$ （积事件）：「信用分低**且**未来发生了违约」——银行最需要识别和避免的核心风险
- $\bar{B}$ （对立事件）：「未来一年内**没有**违约」——银行期望的结果，利润的来源
- $B - A$ （差事件）：「发生了违约，**但**信用分并不低」——评分模型的「漏判」，需要优化的地方

回到开场那份保单

开场的 Leonard 案，用今天的记号可以一句话说清：保单承保的不是「风灾」 W ，而是「风灾**且**非水灾」 $W \cap \bar{F}$ 。

W 与 $W \cap \bar{F}$ 的差别，就是 13 万美元与 1661 美元的差别。

应用：完备事件组不是编的，是法定的

背景

《商业银行金融资产风险分类办法》规定，商业银行必须把全部贷款划分为**正常、关注、次级、可疑、损失** 五类，后三类合称**不良贷款**。每笔贷款**必须且只能**落入一类——这正是完备事件组的定义。

类别	A_1 正常	A_2 关注	A_3 次级	A_4 可疑	A_5 损失
余额 (万亿元)	225.14	5.11	1.14	0.81	1.55

当堂算一算

设 $B = A_3 \cup A_4 \cup A_5$ (不良) , $C = A_1 \cup A_2$ (正常) 。

- Ω 总额 = $225.14 + 5.11 + 1.14 + 0.81 + 1.55 = 233.75$ 万亿元
- 由**有限可加性**: $P(B) = \frac{1.14 + 0.81 + 1.55}{233.75} = \frac{3.50}{233.75} \approx 1.50\%$ ——与官方公布的不不良贷款率**完全吻合**
- 由**对立事件**: $P(C) = 1 - P(B) = 98.50\%$, 与直接相加 $\frac{230.25}{233.75}$ 一致

来源

国家金融监督管理总局《2025年四季度银行业保险业主要监管指标数据情况》（2026-02-12）及其附件《2025年商业银行主要监管指标情况表》 | 访问日期 2026-07-30。五类分项余额取自附件精确表。

应用：分类器的四格表也是完备事件组

背景

绪论提过 AI 能自动识别垃圾邮件。1998 年微软研究院与斯坦福的一篇论文最早系统做了这件事：用某用户一年积累的邮件训练分类器，再对他随后一周收到的 **222 封** 邮件逐封判定。

	判为垃圾	判为正常	合计
实际是垃圾	36	9	45
实际是正常	3	174	177
合计	39	183	222

先确认它是完备事件组

一封邮件只能落进一格 → 四格**两两互斥**；

$36 + 9 + 3 + 174 = 222$ → 四格**并起来是全体**。

两条都满足，这就是一个完备事件组。

来源

Sahami, Dumais, Heckerman & Horvitz, *A Bayesian Approach to Filtering Junk E-Mail*, AAAI Workshop on Learning for Text Categorization, 1998, Table 3. cdn.aaai.org | 访问日期 2026-07-31

当堂算一算：三条性质各用一次

① 判断正确 —— 有限可加性

「实际垃圾且判为垃圾」与「实际正常且判为正常」互斥，直接相加：

$$P = \frac{36 + 174}{222} = \frac{210}{222} \approx 94.6\%$$

② 判断错误 —— 对立事件，两法互验

$\frac{9 + 3}{222} \approx 5.4\%$ ；而 $1 - 94.6\% = 5.4\%$ 。两法一致。

③ 「判为垃圾或本身是垃圾」 —— 广义加法公式

两者**不互斥**，交集是那 36 封：

$$\frac{39}{222} + \frac{45}{222} - \frac{36}{222} = \frac{48}{222} \approx 21.6\%$$

直接数也是 $36 + 9 + 3 = 48$ 封，对上了。

论文里那个 80%，今天还算不了

论文说它「拦下了 80% 的垃圾邮件」，算的是 $36/45$ ——**在实际是垃圾的邮件里**拦下了多少；另一个常用指标 $36/39$ 算的是**在被判为垃圾的邮件里**有多少真是垃圾。两个数都带着「在.....里」这个限定，这就是**条件概率**——今天的三条性质写不出它，第3讲才有工具。

事件间的关系及运算

例：从一批产品中每次取出一个进行检验（不放回），事件 A_i 表示第 i 次取到合格品 ($i = 1, 2, 3$)。用事件符号表示：

- 三次都取到了合格品
- 三次中至少一次取到合格品
- 三次中恰有两次取到合格品
- 三次中最多有一次取到合格品

提示

第二问和第四问，**先想它们的对立事件**是什么，往往比正面枚举短得多。

事件间的关系及运算

例：射手连续向某目标射击三次，事件 A_i 表示第 i 次射中目标 ($i = 1, 2, 3$)。用文字叙述下列事件：

- $A_1 + A_2$
- $A_1 A_2 A_3$
- $A_3 - A_2$
- $\overline{A_1 + A_2}$
- $\overline{A_1} + \overline{A_2}$
- $A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$

注意第 4 个和第 5 个

$\overline{A_1 + A_2}$ 与 $\overline{A_1} + \overline{A_2}$ **长得很像，但不是同一个事件。** 下一页用交互器亲手验证。

交互：事件表达式练习器

怎么用

用 A_1, A_2, A_3 与运算按钮拼出表达式，点「检查」。
判定用真值表，任何等价写法都算对。

重点做第 8、9 题

「两个都没射中」 $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ 与「至少一个没射中」 $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ ——故意让你撞上这个差别。

第 1 / 10 题 · 来自产品检验例题 (F15) ← 上一题 下一题 →

三次都取到了合格品
用 A_1, A_2, A_3 及运算按钮拼出对应的事件表达式，再点「检查」。

点击下方按钮开始拼表达式...

事件	运算符	括号
A_1	$\cup$	$($
A_2	$\cap$	$)$
A_3	$-$	
$\overline{A}$		

⇌ 撤销上一步 清空

符号对照： $\cup$ = 并集 (也写作 "+") $\cap$ = 交集 (也写作并列书写 AB) $-$ = 差集 $\overline{A}$ = 对立事件 (A 不发生)

检查

交互演示：把中文描述拼成事件运算表达式，即时判对错（10 题，含 De Morgan 陷阱）

https://fin-tech.fun/courseware/probability-statistics-undergrad/toolkit/event_builder.html

事件间的关系及运算

例：血型与抗体

人有四种血型 A、B、O 和 AB 型。血液中有两种抗体，抗体 A 只与 A 型和 AB 型发生反应，抗体 B 只与 B 型和 AB 型发生反应。现抽血样并放入抗体 A、抗体 B。定义事件 A 为血样与抗体 A 发生反应，事件 B 为血样与抗体 B 发生反应。请用 A 、 B 及其运算表示不同血型。

- A 型: $A\bar{B}$
- B 型: $\bar{A}B$
- O 型: $\bar{A} \cap \bar{B}$
- AB 型: AB

回头看

这四个事件两两互斥、并集为 Ω ——又一个**完备事件组**。而 O 型的 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 就是 $\overline{A \cup B}$ ，De Morgan 律在这里自然出现。

接下来

到这里，事件已经能被**精确地写下来、算清楚了**。开场那个问题回答了一半。

但只回答了一半。我们能写出「信用分低且违约」这个事件，却还不能说它**有多可能**发生。而风控经理要签字的，恰恰是那个数。

那么，「有多可能」怎么才能变成一个数，而且不自相矛盾？**概率的公理化定义就是来回答这一问的**。

概率的定义

概率的公理化定义 (Kolmogorov, 1933)

设 Ω 是样本空间, P 是定义在事件集上的实值函数, 如果 P 满足下面的条件:

- **非负性**: 对任意事件 A , $P(A) \geq 0$
- **完全性 (规范性)**: $P(\Omega) = 1$
- **可列可加性**: 对于两两互斥的事件 $A_1, A_2, \dots$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

就称 P 为**概率**。

为何需要严格的公理?

这三条公理是整个概率论大厦的基石, 确保了所有概率计算和推理的**逻辑自治性**。

注意公理**没有说**概率是「频率的极限」或「主观信念」——它只规定了要满足什么。怎么算, 是后面几讲的事。

概率的一些性质

由三条公理推出的六条性质

- $P(\emptyset) = 0$
- **有限可加性**: 有限个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

- **单调性**: 如果 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且 $P(B - A) = P(B) - P(A)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 对任意事件 A , $0 \leq P(A) \leq 1$
- **广义加法公式**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

证明思路

六条全部只用三条公理推出, 不需要额外假设。例如有限可加性, 是在可列可加性里补上 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ 得到的。

思考: 把广义加法公式推广到三个事件?

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

概率的一些性质

例：一个选课的学生，可能是男生或女生。如果男生选课概率为 0.3，女生选课的的概率是多少？

设男生选课为 A ，女生选课为 B ，样本空间为 $A \cup B$ 。

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$ 。由于 A 、 B 为互斥事件， $P(A \cap B) = 0$ ，故 $P(B) = 1 - P(A) = 0.7$ 。

例：考虑两个事件 A 、 B ， $P(A) = 1/3$ ， $P(B) = 1/2$ ，在以下情况下计算 $P(B \cap \bar{A})$ ：1) A 、 B 互斥；2) $A \subset B$ ；3)

$$P(A \cap B) = 1/8$$

1) $1/2$ 2) $1/6$ 3) $3/8$

概率的一些性质

例：考虑两个事件 A 、 B ， $P(A) = 0.4$ ， $P(B) = 0.7$ 。计算 $P(A \cap B)$ 可能的最大值和最小值，以及在什么情况下可以达到？

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1.1 - P(A \cup B)$$

因为 $B \subset A \cup B$ ，故 $0.7 \leq P(A \cup B) \leq 1$ 。

$P(A \cap B)$ 最大值为 0.4，当 $A \subset B$ 时达到。

$P(A \cap B)$ 最小值为 0.1，当 $A \cup B = \Omega$ 时达到。

这题为什么重要

只给边际概率，交集就**不是唯一确定的**，只能给出区间。要确定它，还需要新的信息，而这是第3讲**条件概率**要解决的。

本讲总结

① 回到开场那个问题

合同争议的根子，是「保什么」这句话从头到尾没有被写成一个**确定的集合**。一旦写成集合，歧义就没有了：

$$\text{可赔付} = W \cap \overline{F}$$

风灾 W 、水灾 F ，两个事件一确定， $W \cap \overline{F}$ 就是唯一确定的一个集合，不再取决于谁怎么读那句中文。**争的从来不是事实，是记号。**

这一讲做的就是这件事：**把一句中文，变成一个能算的集合。**

本讲总结 (续)

② 核心结论

- 事件即集合; $A - B = A \cap \overline{B}$; De Morgan 律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- 三条公理: 非负性、 $P(\Omega) = 1$ 、可列可加性
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

③ 易错提醒

- **互斥 $\neq$ 独立**。互斥关于集合, 独立关于概率 (第3讲)
- $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$, 取补不能逐项分配
- **不互斥不能直接相加**, 必须减交集

④ 下一讲

三条公理只规定了概率**要满足什么约束**, 没有规定 **基本事件的概率是多少**——而这些数一旦定下, 任何事件的概率都由可加性跟着定了。

下一讲: 当所有结果等可能时, 基本事件的概率可以直接数出来。