
作业讲解与微积分复习

习题课 1 · 概率论与数理统计

复旦大学经济学院 ECON130001

前 45 分钟：作业讲解

- ① 习题 1-2 (概率的性质、古典概型、几何概型) : 1、3、5、7、9、11
- ② 习题 1-3 (条件概率、乘法法则、全概率公式、贝叶斯定理) : 2、4、6、11、12、13
- ③ 习题 1-4 (独立性) : 4、6、10

重点讲四道：1-2 第 11 题、1-3 第 4 题、1-3 第 12 题、1-4 第 10 题。

习题 1-2 第 1、3 题：概率的性质

第 1 题

$A \subset B$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ 。求 (1) $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$;
(2) $P(AB)$; (3) $P(A \cup B)$; (4) $P(\bar{A}B)$; (5) $P(\bar{A}\bar{B})$,
 $P(\bar{B}A)$ 。

解

关键： $A \subset B$ 时 $AB = A$, $A \cup B = B$ 。

(1) 0.6, 0.4; (2) $P(AB) = P(A) = 0.4$; (3) $P(A \cup B) = P(B) = 0.6$;

(4) $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.2$;

(5) $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.4$, $P(\bar{B}A) = P(A) - P(AB) = 0$ 。

第 3 题

$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cup B) = 0.8$ 。求 $P(B - A)$
与 $P(A - B)$ 。

解

先求交： $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4$ 。

$P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.3$, $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.1$ 。

$P(B - A) = P(B) - P(AB)$, **不是** $P(B) - P(A)$ 。后者
只在 $A \subset B$ 时成立 (第 1 题正是这种情形)。

习题 1-2 第 5、7 题：排列计数

第 5 题

书架上有一部五卷册的文集，求各册自左至右或自右至左恰好排成自然顺序的概率。

解

五册的排法共 $A_5^5 = 5! = 120$ 种，等可能；符合要求的只有正序、倒序 2 种：

$$P = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

第 7 题

n 个朋友随机地围绕圆桌就座，求其中指定的两个人座位相邻的概率。

解

先让甲坐下。乙在其余 $n - 1$ 个座位上等可能，其中与甲相邻的有 2 个：

$$P = \frac{2}{n-1} \quad (n \geq 3)$$

验算： $n = 3$ 时概率为 1——三人围坐，任意两人都相邻。

习题 1-2 第 9 题：抽检中的次品数

题

设有 N 件产品，其中 M 件次品，从中任取 n 件。(1) 求恰有 k 件次品的概率 ($k \leq \min\{M, n\}$)；(2) 求至少有 2 件次品的概率。

解

(1) 从 N 件中取 n 件，共 C_N^n 种取法；恰有 k 件次品，即从次品中取 k 件、从正品中取 $n - k$ 件：

$$P = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

(2) 「至少 2 件」的对立事件是「0 件或 1 件」：

$$P = 1 - \frac{C_{N-M}^n + C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$$

「至少……」类问题，先看对立事件是否更简单：这里正面要加 2, 3, ... 许多项，反面只有两项。

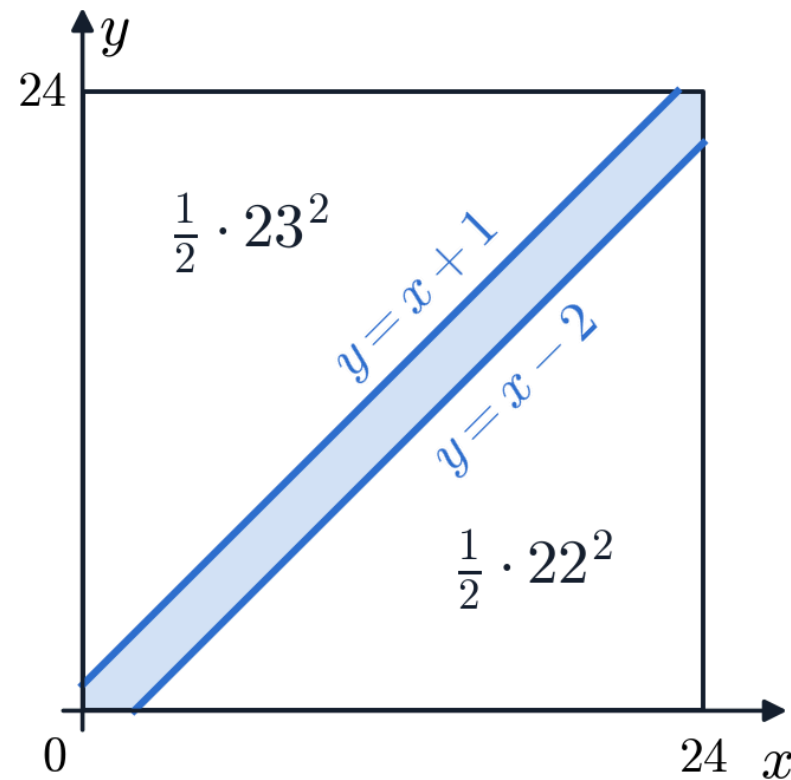
习题 1-2 第 11 题：两艘船停靠泊位

题

两艘船都要停靠同一泊位，它们可能在一昼夜（24 h）的任意时刻到达，停靠时间分别为 1 h 和 2 h。求有一艘船需要等待的概率。

一种到达情况，就是正方形里的一个点

记停 1 h 的船在 x 时到达，停 2 h 的船在 y 时到达。点 (x, y) 落在正方形 $[0, 24]^2$ 内，落在任一区域的概率与该区域的面积成正比（几何概型）。



正方形中的每个点，对应两艘船的一种到达情况

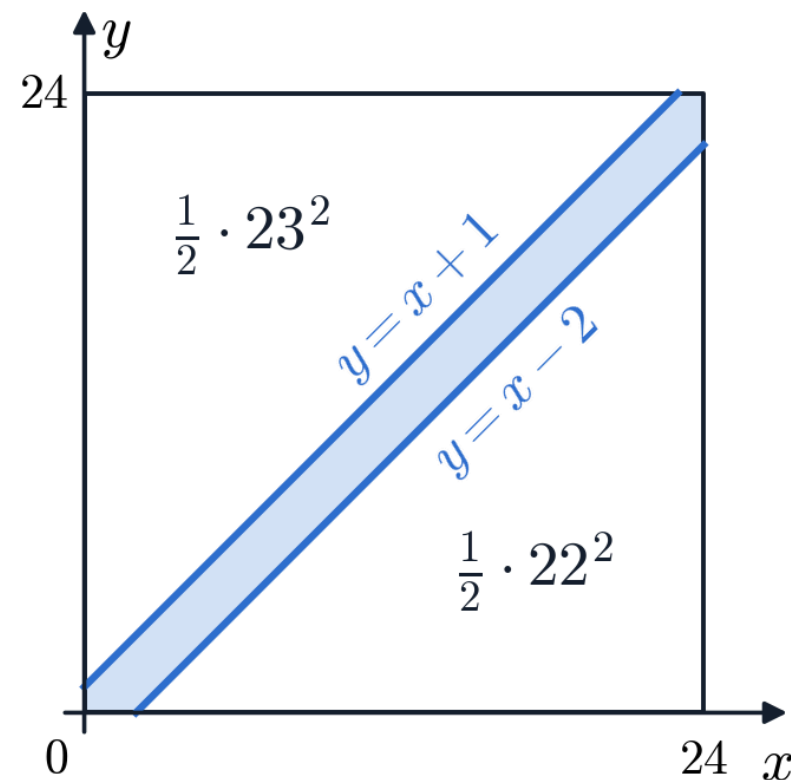
第 11 题（续）：什么时候需要等待

什么时候需要等待

停 1 h 的船先到：它在 $x + 1$ 时离开，另一艘在此之前到达就要等，即 $x \leq y < x + 1$ 。例如它 8:00 到，另一艘 8:30 到，要等半小时。

停 2 h 的船先到：它在 $y + 2$ 时离开，即 $y \leq x < y + 2$ 。例如它 8:00 到，另一艘 9:30 到，仍要等。

合起来： $x - 2 < y < x + 1$ ，即右图的阴影带。



阴影带：需要等待

第 11 题 (续) : 用面积算概率

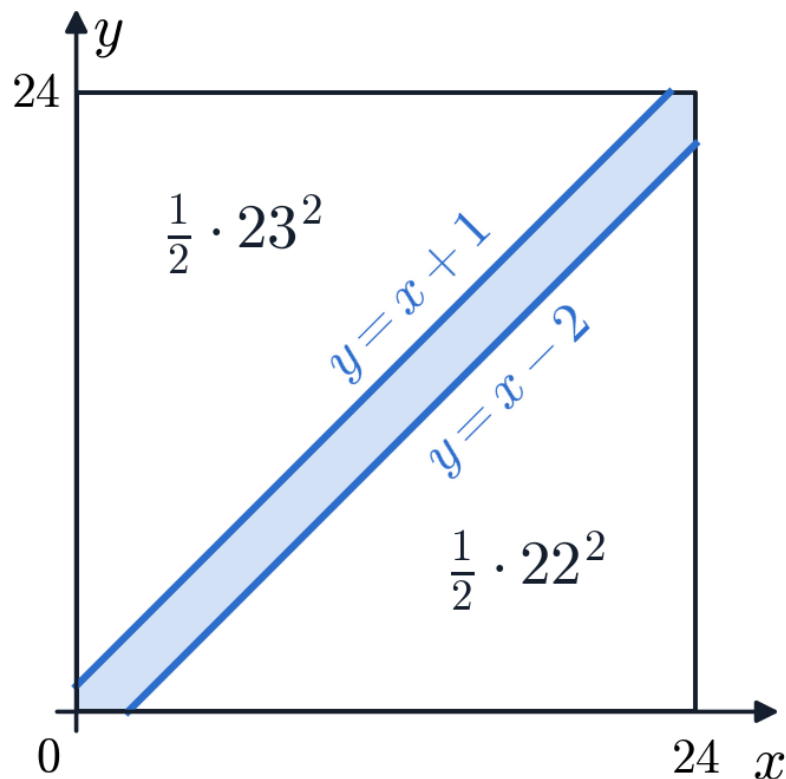
算面积

直接算阴影带不方便，改算带外的两个三角形：

$y \geq x + 1$ ：左上的三角形，直角边 $24 - 1 = 23$ ；

$y \leq x - 2$ ：右下的三角形，直角边 $24 - 2 = 22$ 。

$$P = 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot 23^2 + \frac{1}{2} \cdot 22^2}{24^2} = \frac{139}{1152} \approx 0.121$$



带外两个三角形：不需要等待

习题 1-3 第 2、4 题：条件概率的两种算法

第 2 题

$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B | A) = 0.8$, 求 $P(AB)$ 及 $P(\overline{A}\overline{B})$ 。

解：乘法法则 $P(AB) = P(A)P(B | A) = 0.4$; $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.5 + 0.6 - 0.4) = 0.3$ 。

第 4 题

掷两颗骰子，已知点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率。分别用条件概率的定义、样本空间的收缩计算。

方法一：定义

记 $A =$ 点数之和为 7, $B =$ 有一颗为 1 点。 $P(A) = \frac{6}{36}$;

$AB = \{(1, 6), (6, 1)\}$, $P(AB) = \frac{2}{36}$;

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

方法二：样本空间的收缩

已知和为 7，样本空间收缩为 6 个结果：

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 。其中有 1 点的 2 个：

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

习题 1-3 第 6 题：波利亚模型

题

袋中有 r 个红球、 t 个白球。每次任取一球，观察颜色后放回，并再放入 a 个与取出的球同色的球。连续取球四次，求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解

记 A_i = 第 i 次取到红球。由乘法法则：

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3) \\ &= \frac{r}{r+t} \cdot \frac{r+a}{r+t+a} \cdot \frac{t}{r+t+2a} \cdot \frac{t+a}{r+t+3a} \end{aligned}$$

这个模型描述什么

取到红球后，袋中红球变多，下一次再取到红球的可能性随之增大：**某种结果出现得越多，就越容易再出现**。这个模型由 Eggenberger 与 Pólya 于 1923 年提出，最初用来描述传染病的传播：已出现的病例越多，下一个人被感染的可能性越大。

习题 1-3 第 11 题：信号传输

题

两种信息分别编码为 X 和 Y 传送。 X 被误收作 Y 的概率为 0.02, Y 被误收作 X 的概率为 0.01; X 与 Y 传送的频繁程度之比为 2 : 1。若接收站收到的是 X , 求原发信息也是 X 的概率。

解

记 A = 发出 X , B = 收到 X 。已知 $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$, $P(B | A) = 1 - 0.02 = 0.98$, $P(B | \bar{A}) = 0.01$ 。由贝叶斯定理:

$$P(A | B) = \frac{0.98 \times \frac{2}{3}}{0.98 \times \frac{2}{3} + 0.01 \times \frac{1}{3}} = \frac{1.96}{1.97} = \frac{196}{197} \approx 0.995$$

题目给的是误收的概率 0.02, 分子要用的是正确接收的概率 $1 - 0.02 = 0.98$ 。

习题 1-3 第 12 题：两箱零件

题

第一箱 50 件，其中 10 件一等品；第二箱 30 件，其中 18 件一等品。任挑一箱，从中不放回地依次取两件。求：(1) 第一次取出一等品的概率；(2) 已知第一次取出一等品，第二次仍是一等品的概率。

解

记 H = 挑中第一箱， A_i = 第 i 次取到一等品。

(1) 全概率公式： $P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = 0.4$ 。

(2) $P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29}$,

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{690}{1421} \approx 0.486$$

常见错误

写成 $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{29} \approx 0.385$ 。错在仍用 $\frac{1}{2}$ 给两箱加权：第一次取到一等品之后，挑中哪一箱的可能性已经变了。

按贝叶斯定理更新： $P(H | A_1) = \frac{1}{4}$ ， $P(\bar{H} | A_1) = \frac{3}{4}$ ，于是 $\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{49} + \frac{3}{4} \cdot \frac{17}{29} \approx 0.486$ ，与左边一致。

习题 1-3 第 13 题：一道证明

题

设 A 、 B 为两个事件，若 $P(A | B) = 1$ ，证明 $P(\bar{B} | \bar{A}) = 1$ 。

证

由 $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$ 得 $P(AB) = P(B)$ 。于是

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A)} = 1$$

(题中隐含 $P(B) > 0$ 、 $P(A) < 1$ ，否则两个条件概率没有定义。)

可以对照逻辑里的逆否命题来理解：「 B 发生则 A 发生」与「 A 不发生则 B 不发生」是同一件事。

习题 1-4 第 4、6 题：独立性

第 4 题

A 与 B 相互独立, $P(A) = \alpha$, $P(B) = \beta$ 。求 (1) $P(A \cup B)$; (2) $P(A \cup \bar{B})$; (3) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ 。

解

A 、 B 独立时, A 与 $\bar{B}$ 也独立。

$$(1) \alpha + \beta - \alpha\beta;$$

$$(2) \alpha + (1 - \beta) - \alpha(1 - \beta) = 1 - \beta + \alpha\beta;$$

$$(3) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - \alpha\beta.$$

第 6 题

三人独立地破译一份密码, 各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。求至少一人能译出的概率。

解

对立事件是「三人都译不出」:

$$P = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

用三个事件的加法公式要算七项, 结果相同; 取对立事件只需一行。

习题 1-4 第 10 题：先下手为强

题

甲、乙两人射击水平相当，约定轮流对同一目标射击，直到有人命中为止，命中的一方获胜。先射击的一方是否一定占优？为什么？

解

设每次命中的概率为 p ，记 $q = 1 - p$ ($0 < q < 1$)。甲先射，甲在第 1、3、5、..... 次射击时命中才获胜，此前各次都未命中：

$$P(\text{甲胜}) = p + q^2p + q^4p + \cdots = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}$$

$$P(\text{乙胜}) = qp + q^3p + \cdots = \frac{qp}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}$$

因为 $q < 1$ ， $\frac{1}{1+q} > \frac{q}{1+q}$ ：**先射击的一方一定占优。**

求和用的是等比级数，公比是 q^2 ，不是 q 。

后 45 分钟：第 5 讲起要用的微积分

- ① **复合函数求导**：链式法则
- ② **变上限积分的求导**：积分上限是变量时，怎样对它求导
- ③ **分部积分**：乘积形式的被积函数怎样积分
- ④ **二重积分**：画图、求交、定限，化成两次定积分（本节重点）

从第 5 讲起，计算的主要工具会从排列组合换成积分与求导。今天逐一复习这四项基本功，每一项都按「法则 → 例题 → 练习」展开。

复合函数求导：链式法则

法则

若 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 都可导, 则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

要点

外层函数求导（里面原样保留），再乘内层函数的导数。

注意符号

内层函数递减时，它的导数是负数： $u = -x$ 时 $u' = -1$, $u = \frac{1}{x}$ 时 $u' = -\frac{1}{x^2}$ 。这个负号要一并乘进去。

例：用链式法则求导

例 1 $y = \sqrt{1+x^2}$

第一步 分层：外层 $f(u) = \sqrt{u}$ ，内层 $u = 1 + x^2$ 。

第二步 各自求导： $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ ， $u' = 2x$ 。

第三步 相乘，把 u 代回：

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

例 2 $y = e^{1/x} \ (x \neq 0)$

第一步 分层：外层 $f(u) = e^u$ ，内层 $u = \frac{1}{x}$ 。

第二步 各自求导： $f'(u) = e^u$ ， $u' = -\frac{1}{x^2}$ 。

第三步 相乘，把 u 代回：

$$y' = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

例 2 的内层函数 $\frac{1}{x}$ 递减，导数为负，结果带一个负号。

练习 1：求导数

题

(1) e^{-2x} ; (2) $\ln(1+x^2)$; (3) $\sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) 。

解

(1) 外层 e^u , 内层 $u = -2x$: $e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$ 。

(2) 外层 $\ln u$, 内层 $u = 1+x^2$: $\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$ 。

(3) 外层 $\sin u$, 内层 $u = \frac{1}{x}$: $\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ 。

练习 2：抽象函数的求导

什么是抽象函数

设 F 可导，但不知道它的具体表达式，只把它的导数记作 f ，即 $F' = f$ 。链式法则照样适用：外层是 F ，外层求导就得到 f 。例如 $[F(2x)]' = f(2x) \cdot 2$ 。

题

对 $y > 0$ ，求导数：(1) $G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$ ； (2) $H(y) = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right)$ 。

解

$$(1) G'(y) = f(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}.$$

$$(2) H'(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

两题各有两个负号相乘：一个是式子本身的减号，一个来自递减的内层函数 $(-\sqrt{y}$ 与 $\frac{1}{y})$ 。

变上限积分及其求导

什么是变上限积分

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 的积分上限是变量 x ，积分的结果随 x 变化，所以 Φ 是 x 的函数。积分变量写成 t ，是为了和上限 x 区分开。

求导公式 (f 连续)

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

即：对上限求导，就是把上限代进被积函数。

例

$\frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt = \cos x$ 。验算：先积分， $\int_0^x \cos t dt = \sin x$ ；再求导，得 $\cos x$ ，两者一致。

上限或下限是函数时

两个公式 (f 连续, u 、 v 可导)

② $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) u'(x)$: 上限是函数时, 代入后再乘它的导数。

③ $\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) u'(x) - f(v(x)) v'(x)$: 下限也变时, 减去下限那一项。

为什么

② 就是链式法则: 外层是公式①, 内层是 $u(x)$ 。③ 由 $\int_v^u = \int_a^u - \int_a^v$ 拆成两个②。

例

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{-t} dt = e^{-x^2} \cdot 2x \quad (\text{公式②}, u = x^2)。$$

验算: 先积分, $\int_0^{x^2} e^{-t} dt = 1 - e^{-x^2}$; 再求导, 得 $2xe^{-x^2}$, 两者一致。

练习 3：变上限积分的求导

题

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{2x} e^{t^2} dt; \quad (2) \frac{d}{dx} \int_x^1 t^2 dt; \quad (3) \frac{d}{dy} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \cos t dt \quad (y > 0) .$$

解

(1) 公式②, $u = 2x$: $e^{(2x)^2} \cdot 2 = 2e^{4x^2}$. e^{t^2} 没有初等原函数, 但求导不必先积出来。

(2) 下限是变量: 先对调上下限, $\int_x^1 t^2 dt = -\int_1^x t^2 dt$, 导数为 $-x^2$ 。

(3) 公式③: $\cos \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - \cos(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{\cos \sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ 。验算: 原积分等于 $2 \sin \sqrt{y}$, 求导得同一结果。

(3) 与练习 2(1) 是同一件事: $F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t) dt$ 。

分部积分：公式

公式

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

定积分： $\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du。$

公式从哪里来

乘积求导 $(uv)' = u'v + uv'$ ，两边积分，再移项。所以分部积分就是乘积求导法则倒过来用。

怎样选 u

u 选求导后变简单的（如 x 、 x^2 、 $\ln x$ ）； dv 选容易积分的（如 $e^x dx$ 、 $\sin x dx$ 、 $\cos x dx$ ）。

例：分部积分

例 求 $\int x e^x dx$

第一步 选取： $u = x$, $dv = e^x dx$ 。

第二步 求出 du 与 v ： $du = dx$, $v = e^x$ 。

第三步 代入公式：

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$$

验算： $[(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$ 。

选反了会怎样

若取 $u = e^x$, $dv = x dx$, 则 $v = \frac{x^2}{2}$ ：

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

剩下的积分里 x 的次数从 1 升到 2，比原来更难。

练习 4：分部积分

题

$$(1) \int x \cos x \, dx; \quad (2) \int \ln x \, dx; \quad (3) \int_0^1 x e^{-x} \, dx; \quad (4) \int x^2 e^x \, dx.$$

解

$$(1) u = x, v = \sin x: x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$(2) \text{被积函数只有一项时, 可以取 } dv = dx. u = \ln x, v = x: x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

$$(3) \text{定积分的边界项也要代入上下限. } u = x, v = -e^{-x}: [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx = -e^{-1} + (1 - e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$(4) \text{用两次: 取 } u = x^2, \text{ 得 } x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx; \text{ 后一项就是上一页的例题, 结果为 } (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

二重积分：化成两次定积分

从几何概型说起

第 2 讲的几何概型里，概率是面积之比，而区域 D 的面积就是 $\iint_D 1 \, dx \, dy$ 。被积函数换成一般的 $f(x, y)$ ，计算方法不变。

计算方法：先对一个变量积分，再对另一个

若 D 可以写成 $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, 则

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

内层对 y 积分时，把 x 看成常数；内层积完只剩 x ，再对 x 积分。

定限三步

每道二重积分都按这三步做

1. **画图**：把所有约束画在同一张图上。
2. **求交**：区域由几组约束共同给出时，先求出公共部分。
3. **定限**：先定外层变量的范围；再在图上任取外层变量的一个值，看对应的竖条（或横条）从哪条线进入区域、从哪条线离开，读出内层变量的上下限。

两条检查

外层变量的上下限必须是常数；内层变量的上下限可以含外层变量，但不能含内层变量本身。

换一种积分次序再算一遍，结果必须相同。

例（一）：先对 y 积分

题

D 是以 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 、 $(1,1)$ 为顶点的三角形，即 $0 \leq y \leq x \leq 1$ 。求

$$\iint_D xy \, dx \, dy.$$

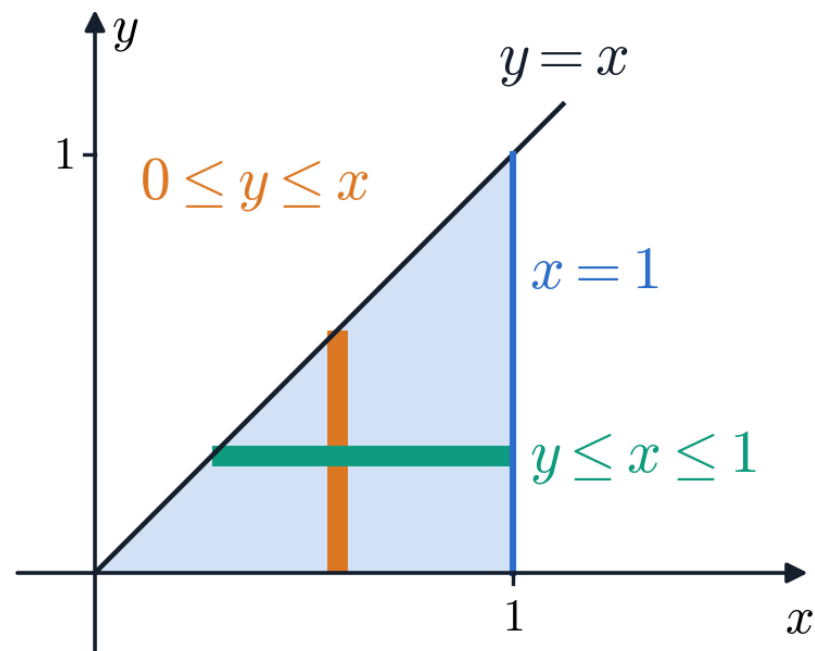
解

第一步 画图：见右图。

第二步 定限：外层 x 从 0 到 1；对每个 x ，橙色竖条从 $y = 0$ 进入区域、到 $y = x$ 离开，所以 y 从 0 到 x 。

第三步 内层 (x 看成常数)：
$$\int_0^x xy \, dy = x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^3}{2}.$$

第四步 外层：
$$\int_0^1 \frac{x^3}{2} \, dx = \frac{1}{8}.$$



本页用橙色竖条：先对 y 积分

例（二）：同一道题，先对 x 积分

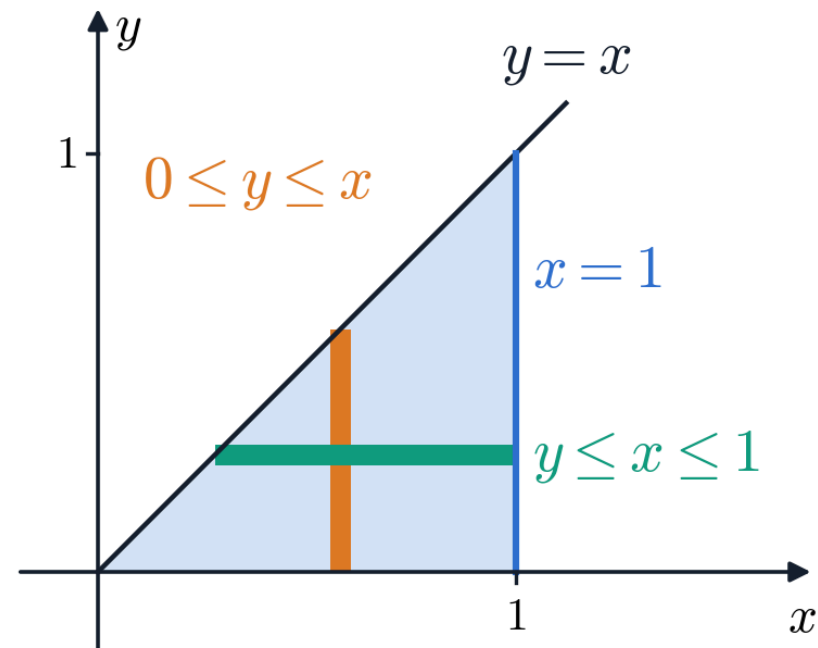
解

第二步 定限：外层 y 从 0 到 1；对每个 y ，绿色横条从 $x = y$ 进入区域、到 $x = 1$ 离开，所以 x 从 y 到 1。

第三步 内层（ y 看成常数）：
$$\int_y^1 xy \, dx = y \cdot \frac{1 - y^2}{2}。$$

第四步 外层：
$$\int_0^1 \frac{y - y^3}{2} \, dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}。$$

两种次序的积分限完全不同，结果必须相同。算完一种、再用另一种验算，可以检查定限是否正确。



本页用绿色横条：先对 x 积分

练习 5：两种次序，两套积分限

题

设 $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ 。

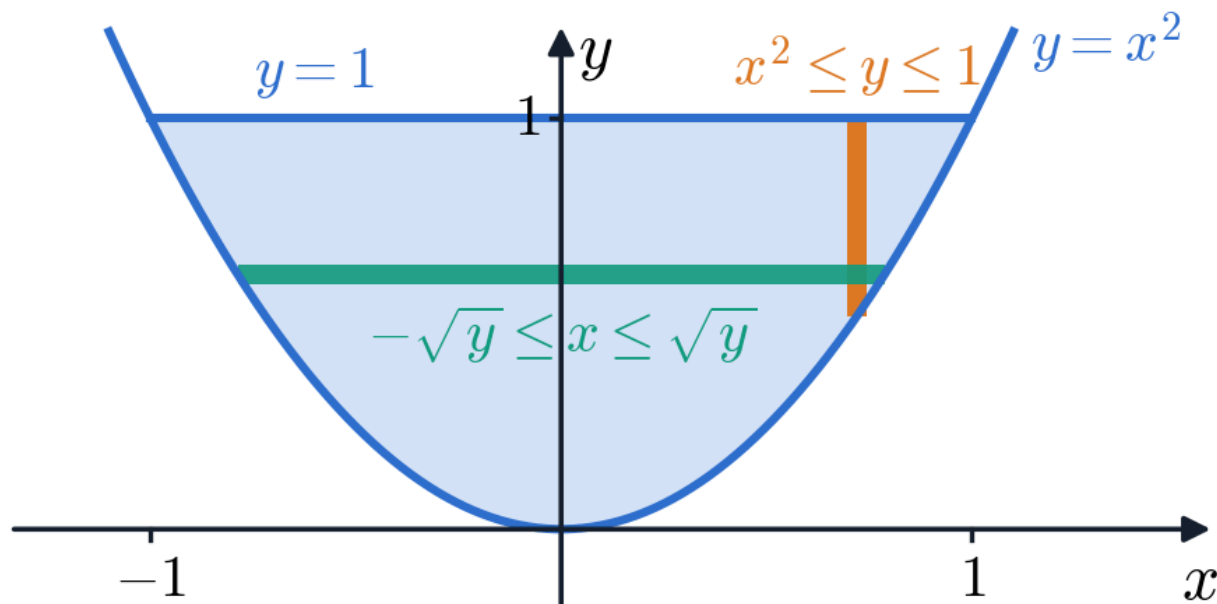
(1) 求常数 c , 使 $\iint_D cy \, dx \, dy = 1$;

(2) 固定 x 、沿竖条对 y 积分, 得到 $g(x)$; 固定 y 、沿横条对 x 积分, 得到 $h(y)$ 。

解

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y \, dy = \int_{-1}^1 \frac{1-x^4}{2} dx = \frac{4}{5}, \text{ 故 } c = \frac{5}{4}.$$

$$(2) \text{ 竖条: } g(x) = \int_{x^2}^1 \frac{5}{4} y \, dy = \frac{5}{8}(1-x^4), \quad -1 \leq x \leq 1.$$



橙色竖条: y 从 x^2 到 1; 绿色横条: x 从 $-\sqrt{y}$ 到 $\sqrt{y}$

$$\text{横条: } h(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{5}{4} y \, dx = \frac{5}{2} y^{3/2}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

两次积分的限完全不同; 算 $h(y)$ 时, $x < 0$ 的那一半不能漏。

练习 6：求交之后，换个次序就不用分段

题

沿用练习 5 的 D 与 $c = \frac{5}{4}$, 求 $\iint_{D \cap \{y \geq x\}} \frac{5}{4}y \, dx \, dy$.

解一：先对 y 积分，要分两段

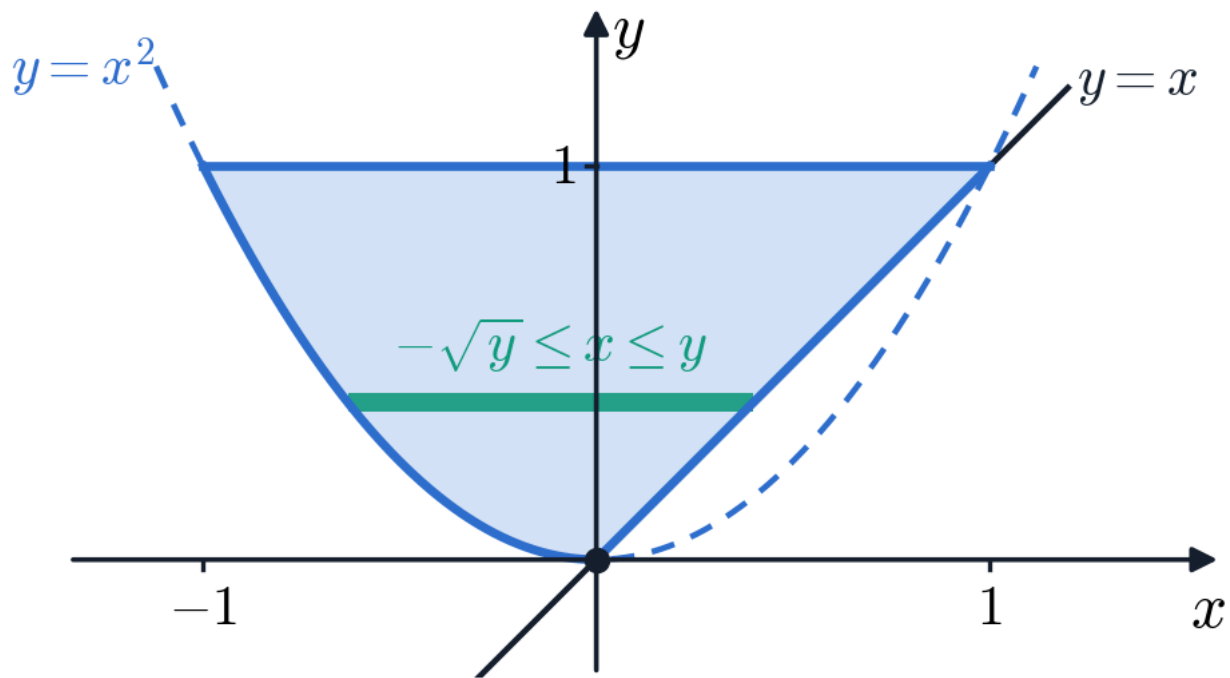
$x < 0$ 时 $y \geq x$ 自动成立，下限是 x^2 ； $0 \leq x \leq 1$ 时 $x \geq x^2$ ，下限是 x 。

$$\int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^1 \frac{5}{4}y \, dy + \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{5}{4}y \, dy = \frac{1}{2} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

解二：先对 x 积分，一段即可

对每个 $y \in [0, 1]$, x 从 $-\sqrt{y}$ 到 y (因为 $y \leq \sqrt{y}$) :

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^y \frac{5}{4}y \, dx = \frac{5}{4} \int_0^1 (y^2 + y^{3/2}) \, dy = \frac{11}{12}$$



下边界在原点处由 $y = x^2$ 转为 $y = x$

定限之前，先比较两种次序：哪一种不用分段，就用哪一种。

练习 7：交换积分次序

题

计算 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$ 。

解

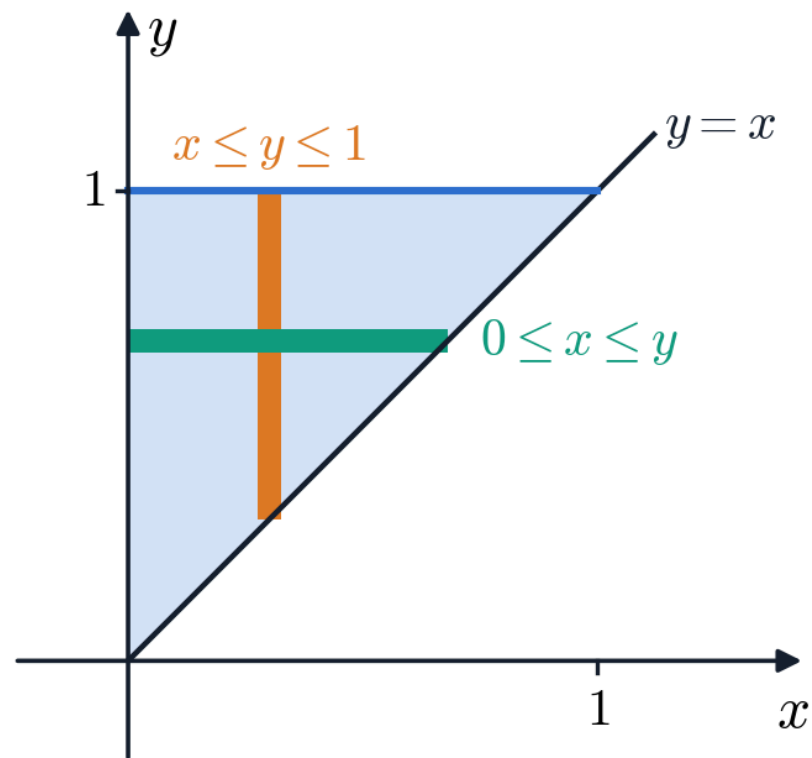
第一步 判断： e^{y^2} 没有初等原函数，按给定次序无法积出。

第二步 由积分限画出区域： $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$ ，即三角形 $0 \leq x \leq y \leq 1$ 。

第三步 按横条重新定限： y 从 0 到 1， x 从 0 到 y ：

$$\int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{e-1}{2}$$

交换次序时，积分限要从图上重新读出，不能把原来的上下限直接对调。



原次序是橙色竖条，换序后是绿色横条