第三次作业详解

多维随机变量及其分布 · 学生自学课件

复旦大学经济学院　ECON130001

习题 3-1 至 3-5 · 共 9 题

题目索引

教材题号	内容	解答页
P70 · 3-1 第4题	联合密度与区域概率	第 3 页
P70 · 3-1 第5题	联合分布函数	第 8 页
P73 · 3-2 第4题	抛物线区域与边缘密度	第 11 页
P73 · 3-2 第5题	圆域均匀分布的边缘密度	第 16 页
P76 · 3-3 第5题	条件密度与条件概率	第 19 页
P80 · 3-4 第5题	独立性与随机系数方程	第 25 页
P86 · 3-5 第3题	两变量之和的密度	第 29 页
P87 · 3-5 第6题	距离的分布与瑞利密度	第 32 页
P87 · 3-5 第9题	最大值、最小值与和的分布律	第 36 页

3-1 第4题：联合密度与区域概率

教材 P70 • 题目

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1. 确定常数 k；
2. 求 $P(X<1, Y<3)$；
3. 求 $P(X<1.5)$；
4. 求 $P(X+Y\le 4)$。

第4题（1）：利用密度的总积分确定常数

积分区域

密度的非零区域为 $D=\{(x,y):0<x<2,\ 2<y<4\}$。区域内 $6-x-y>0$。

$$1=k\int_0^2\int_2^4(6-x-y)\,dy\,dx$$

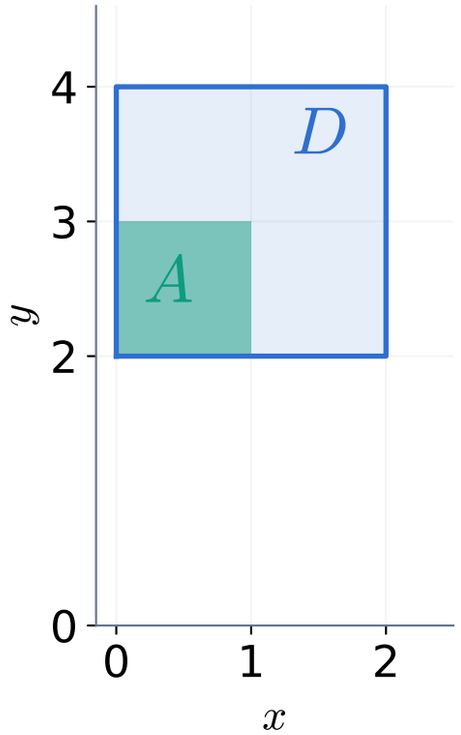
$$\int_2^4(6-x-y)\,dy=\left[(6-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_2^4=6-2x$$

$$1=k\int_0^2(6-2x)\,dx=8k$$

结果

$$\boxed{k=\frac{1}{8}}$$

第4题（2）：矩形区域内的概率



事件与取值范围的交集

$X<1, Y<3$ 在 D 内对应

$$0<x<1, \qquad 2<y<3.$$

$$\begin{aligned} P(X<1, Y<3) &= \frac{1}{8}\int_0^1 \int_2^3 (6-x-y)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{7}{2}-x\right)\,dx \\ &= \boxed{\frac{3}{8}}. \end{aligned}$$

第4题（3）：对另一变量的全部取值积分

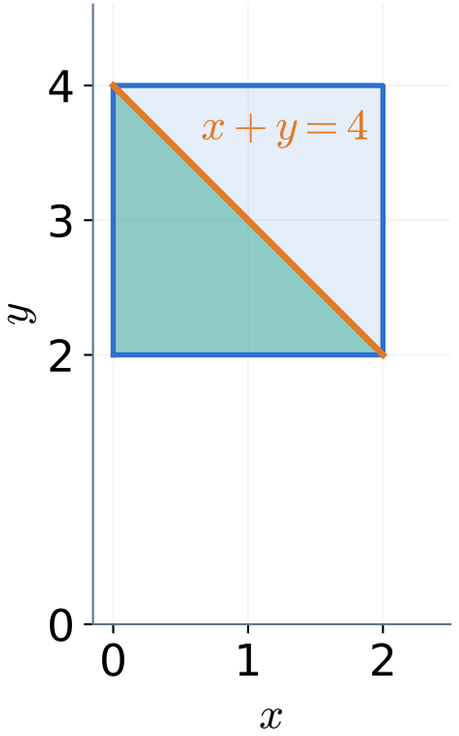
事件仅限制 X，因此 Y 仍在完整区间 $(2,4)$ 内积分。

$$\begin{aligned} P(X<1.5) &= \frac{1}{8}\int_{0}^{3/2}\int_{2}^{4}(6-x-y)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{8}\int_{0}^{3/2}(6-2x)\,dx \\ &= \frac{1}{8}\left[6x-x^{2}\right]_{0}^{3/2} = \boxed{\frac{27}{32}}. \end{aligned}$$

与边缘密度的联系

先对 y 积分，得到 $f_X(x)=(3-x)/4$（$0<x<2$）；再对 x 积分，结果相同。

第4题（4）：直线下方的三角形区域



在 D 内，$x+y\le 4$ 给出

$$0<x<2,\qquad 2<y\le 4-x.$$

$$\begin{aligned}P(X+Y\le 4) &= \frac{1}{8}\int_0^2\int_2^{4-x}(6-x-y)\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int_0^2\left(6-4x+\frac{x^2}{2}\right)dx\\ &= \boxed{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

区域概率的计算

本题的密度随位置变化。绿色区域的概率须对密度积分，不能直接用面积占比计算。

3-1 第5题：由联合密度求分布函数

教材 P70 • 题目

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求常数 A 及 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$。

分布函数的定义

$$F(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y).$$

第5题：归一化与积分计算

确定常数

$$1 = A\int_0^\infty e^{-2u}\,du\int_0^\infty e^{-3v}\,dv = \frac{A}{6}, \qquad \boxed{A = 6}.$$

当 $x>0, y>0$ 时

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x\int_0^y 6e^{-(2u+3v)}\,dv\,du \\ &= \left(\int_0^x 2e^{-2u}\,du\right)\left(\int_0^y 3e^{-3v}\,dv\right) \\ &= (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}). \end{aligned}$$

第5题：完整的联合分布函数

若 $x \le 0$ 或 $y \le 0$，事件 $\{X \le x, Y \le y\}$ 的概率为零。

结果

$$\boxed{F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & x \le 0 \text{ 或 } y \le 0. \end{cases}}$$

边界与极限

$$F(0,y) = F(x,0) = 0, \qquad \lim_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1.$$

分段条件中的“或”表示：任意一个阈值不大于零，联合分布函数即为零。

3-2 第4题：抛物线区域上的边缘密度

教材 P73 • 题目

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

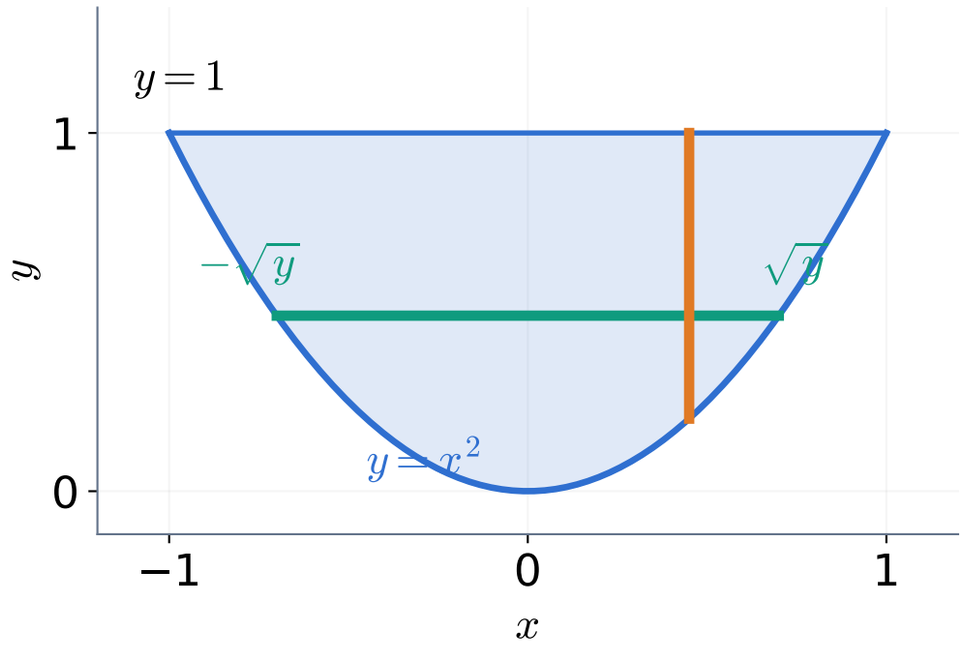
$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（1）确定常数 c；（2）求边缘概率密度。

由区域确定取值范围

$$x^2\le 1 \implies -1\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1.$$

第4题：同一区域的两种积分次序



固定 x：沿竖直方向积分

$$-1 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le 1.$$

固定 y：沿水平方向积分

$$0 \le y \le 1, \qquad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}.$$

积分限

条件 $x^2 \le y$ 同时允许正、负两侧的 x。若仅在 $[0, \sqrt{y}]$ 上积分，会遗漏左半区域。

第4题（1）：确定常数 c

$$
\begin{aligned}
1 &= c\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2 y\,dy\,dx \\
&= \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - x^6\right)dx \\
&= c\int_{0}^{1}\left(x^2 - x^6\right)dx \\
&= c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4c}{21}.
\end{aligned}
$$

结果

$$
\boxed{c = \frac{21}{4}}
$$

第三行利用了 $x^2 - x^6$ 关于 $x = 0$ 的对称性。

第4题（2）：X 的边缘密度

固定 $x \in [-1,1]$，对 $y \in [x^2,1]$ 积分：

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4} x^2 y \, dy \\
&= \frac{21}{8} x^2 [y^2]_{x^2}^{1} = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4).
\end{aligned}
$$

结果

$$
\boxed{
f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
}
$$

第4题（2）：Y 的边缘密度

固定 $y \in [0,1]$，对 $x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$ 积分：

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y \, dx \\ &= \frac{21}{4} y \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2} y^{5/2}. \end{aligned}$$

结果

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{7}{2} y^{5/2}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$$

归一化检验：$\int_0^1 \frac{7}{2} y^{5/2} \, dy = 1$。

3-2 第5题：圆域上的均匀分布

教材 P73 • 题目

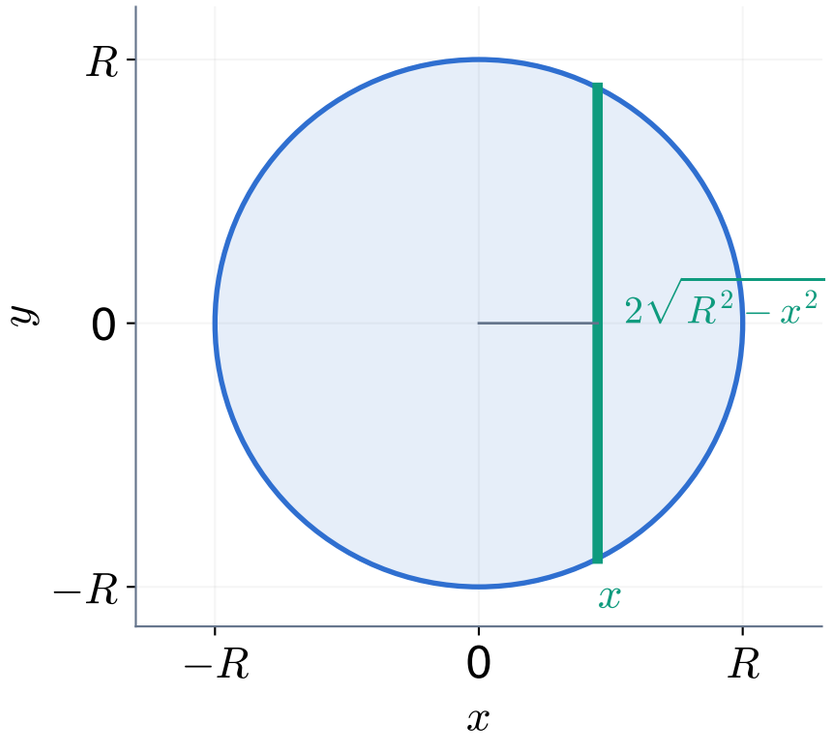
二维随机变量 (X,Y) 在以原点为圆心、R 为半径的圆域上服从均匀分布，$R>0$。求联合概率密度及边缘概率密度。

联合密度

圆域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}$ 的面积为 πR^2。均匀分布的密度在区域内为常数，因此

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

第5题：边缘密度由截线长度决定



固定 $|x| < R$ 时，y 的范围为

$$-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}.$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\, dy$$

$$= \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}.$$

截线在圆心附近较长，靠近左右边缘时较短。

第5题：两个边缘密度

X 的边缘密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x|\le R,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

Y 的边缘密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y|\le R,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

联合均匀与边缘均匀

联合密度在圆域内为常数，但边缘密度还取决于截线长度。**因此，两个边缘分布均不是均匀分布。**

圆域关于两坐标轴及直线 $y=x$ 对称，因此两个边缘密度具有相同形式。

3-3 第5题：边缘分布与条件分布

教材 P76 • 题目

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1. 求边缘概率密度；
2. 求条件概率密度；
3. 求 $P(X>2 \mid Y<4)$。

第5题（1）：分别确定另一变量的积分范围

固定 $x>0$，有 $y>x$

$$f_X(x)=\int_x^{\infty} e^{-y}\,dy=e^{-x}.$$

$$\boxed{f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}}$$

固定 $y>0$，有 $0<x<y$

$$f_Y(y)=\int_0^{y} e^{-y}\,dx=ye^{-y}.$$

$$\boxed{f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}}$$

第二个积分中，y 是固定参数；e^{-y} 对 x 为常数。

第5题（2）：联合密度除以条件变量的边缘密度

给定 $X = x > 0$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\boxed{f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} e^{-(y-x)}, & y > x, \\ 0, & y \le x. \end{cases}}$$

给定 $Y = y > 0$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

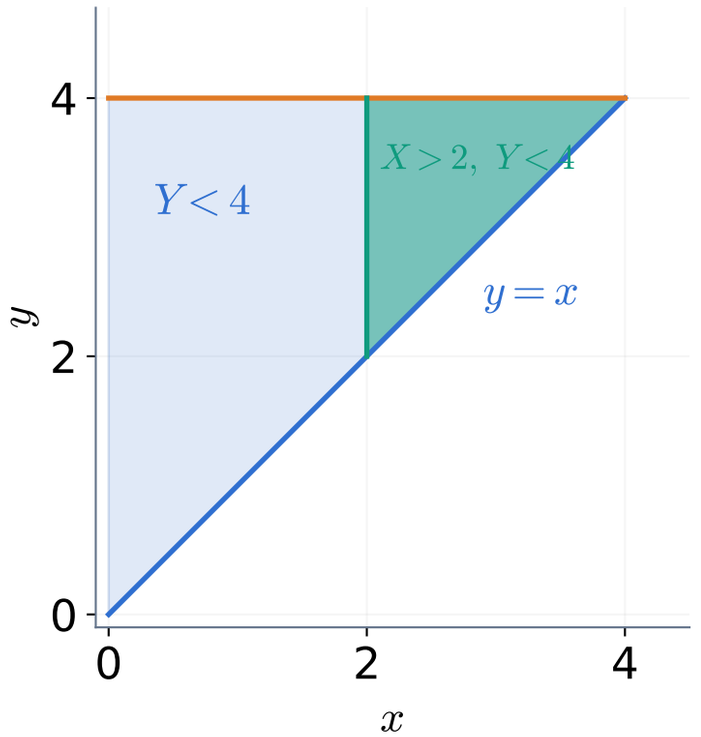
$$\boxed{f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$$

条件密度的取值范围

给定 $X = x$ 后仍需满足 $Y > x$；给定 $Y = y$ 后，X 在 $(0, y)$ 上均匀分布。密度表达式与相应区间应一并写出。

第5题（3）：条件事件与交集区域

$$P(X > 2 \mid Y < 4) = \frac{P(X > 2,\ Y < 4)}{P(Y < 4)}.$$



分母：条件事件

$$0 < y < 4, \qquad 0 < x < y.$$

分子：两个事件同时发生

$$2 < y < 4, \qquad 2 < x < y.$$

图中深绿色区域包含在浅蓝色大三角形内。

第5题（3）：计算两个区域的概率

分母

$$P(Y<4)=\int_0^4 ye^{-y}\,dy=\left[-(y+1)e^{-y}\right]_0^4=1-5e^{-4}.$$

分子

$$\begin{aligned}P(X>2,Y<4)&=\int_2^4\int_2^y e^{-y}\,dx\,dy\\&=\int_2^4(y-2)e^{-y}\,dy\\&=\left[-(y-1)e^{-y}\right]_2^4=e^{-2}-3e^{-4}.\end{aligned}$$

结果

$$\boxed{P(X>2\mid Y<4)=\frac{e^{-2}-3e^{-4}}{1-5e^{-4}}\approx 0.0885}$$

第5题：区间条件与定值条件的区别

本题的条件是 $Y < 4$

满足条件的 Y 可以取 $(0, 4)$ 内的不同值。因此，需要汇总整个条件区域，再除以 $P(Y < 4)$。

给定 $Y = y$ 时

由 $X \mid Y = y$ 在 $(0, y)$ 上均匀分布，

$$P(X > 2 \mid Y = y) = \begin{cases} 0, & 0 < y \leq 2, \\ \dfrac{y-2}{y}, & y > 2. \end{cases}$$

易错处

将条件密度中的 y 直接代为 4，计算的是定值条件 $Y = 4$ 下的概率 $1/2$，并非本题要求的 $P(X > 2 \mid Y < 4)$。

3-4 第5题：随机系数方程有实根的概率

教材 P80 • 题目

X 与 Y 相互独立，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（1）求联合概率密度；

（2）方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 以 a 为未知数，求它有实根的概率。

第5题（1）：由独立性得到联合密度

$X \sim U(0,1)$，故 $f_X(x) = 1$（$0 < x < 1$）。由独立性，

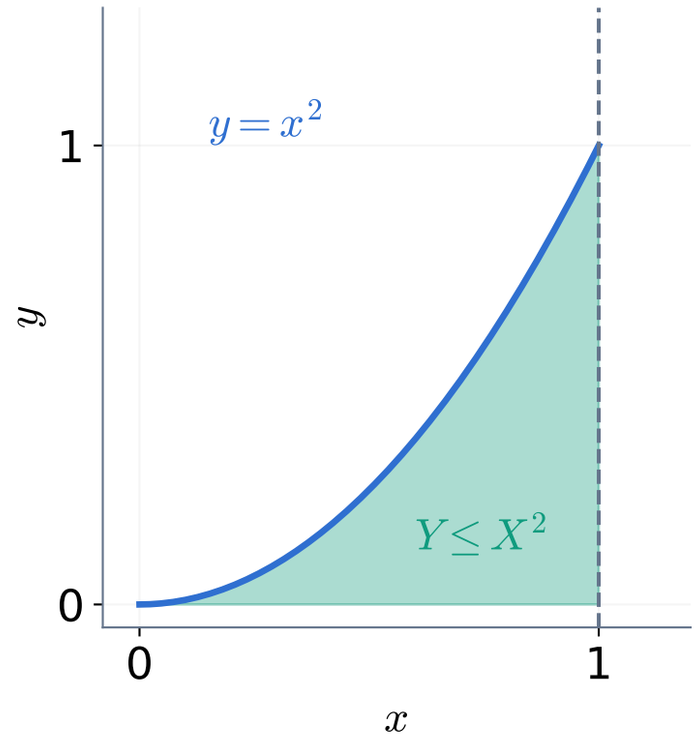
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

结果

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-y/2}, & 0 < x < 1,\ y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$$

联合取值范围为 $0 < x < 1, y > 0$。

第5题（2）：将实根条件转为积分区域



判别式

$$\Delta = (2X)^2 - 4Y = 4(X^2 - Y).$$

方程有实根当且仅当

$$\Delta \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y \le X^2.$$

积分范围

$$0 < x < 1, \qquad 0 < y \le x^2.$$

第5题（2）：积分结果与正态分布函数

$$
\begin{aligned}
P(\text{有实根}) &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{-y/2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 (1 - e^{-x^2/2})\, dx = 1 - \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx.
\end{aligned}
$$

用标准正态分布函数 Φ 表示最后一个积分：

$$
\Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx, \qquad \Phi(0) = \frac{1}{2}.
$$

结果

$$
\boxed{P(\text{有实根}) = 1 - \sqrt{2\pi}\left[\Phi(1) - \frac{1}{2}\right] \approx 0.1444}
$$

联合密度并非常数，因此本题的概率也不能直接用绿色区域的面积计算。

3-5 第3题：三角形区域上两变量之和的分布

教材 P86 • 题目

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

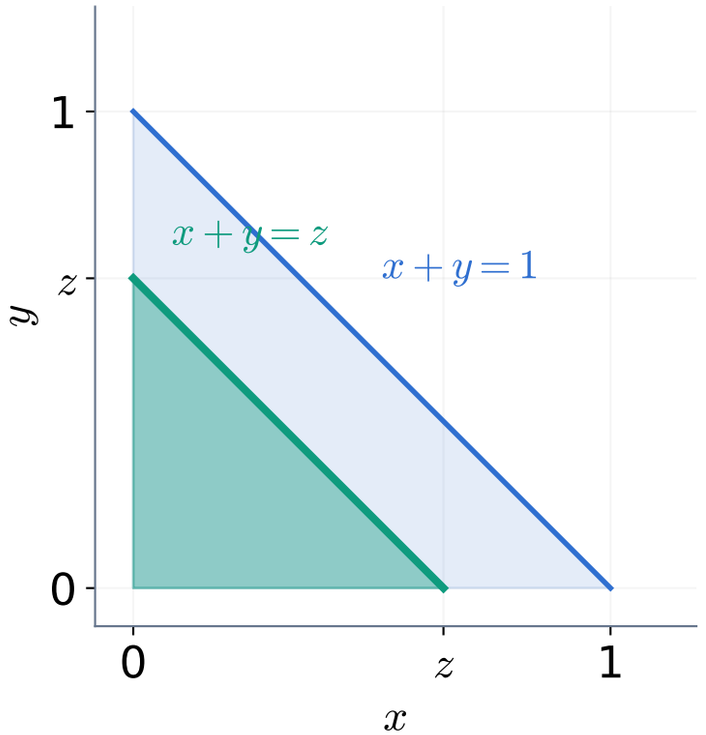
$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le 1,\ y\ge 0,\ x+y\le 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

和的取值范围

由 $x,y\ge 0$ 及 $x+y\le 1$，有 $0\le Z\le 1$。

第3题：先求 Z 的分布函数



当 $0 < z < 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(X + Y \le z) \\
&= \int_0^z \int_0^{z-x} 6x \, dy \, dx \\
&= \int_0^z 6x(z - x) \, dx \\
&= \left[3zx^2 - 2x^3 \right]_0^z = z^3.
\end{aligned}
$$

第3题：分段结果与密度

分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z^3, & 0<z<1,\\ 1, & z\ge 1,\end{cases}$$

对 z 求导

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}3z^2, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}}$$

也可直接使用联合密度

$$f_Z(z)=\int_0^z f(x,z-x)\,dx=\int_0^z 6x\,dx=3z^2,\qquad 0<z<1.$$

这一公式直接对联合密度积分，不要求 X,Y 独立。

3-5 第6题：二维正态向量到原点的距离

教材 P87 • 题目

X, Y 相互独立，且均服从 $N(0, \sigma^2)$，$\sigma > 0$。令

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

证明 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

这一分布称为参数为 σ 的瑞利（Rayleigh）分布。

第6题：分布函数对应圆内的概率

利用独立性写出联合密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right),\qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Z 是点 (X,Y) 到原点的距离，所以 $Z\ge 0$。当 $z\ge 0$ 时，

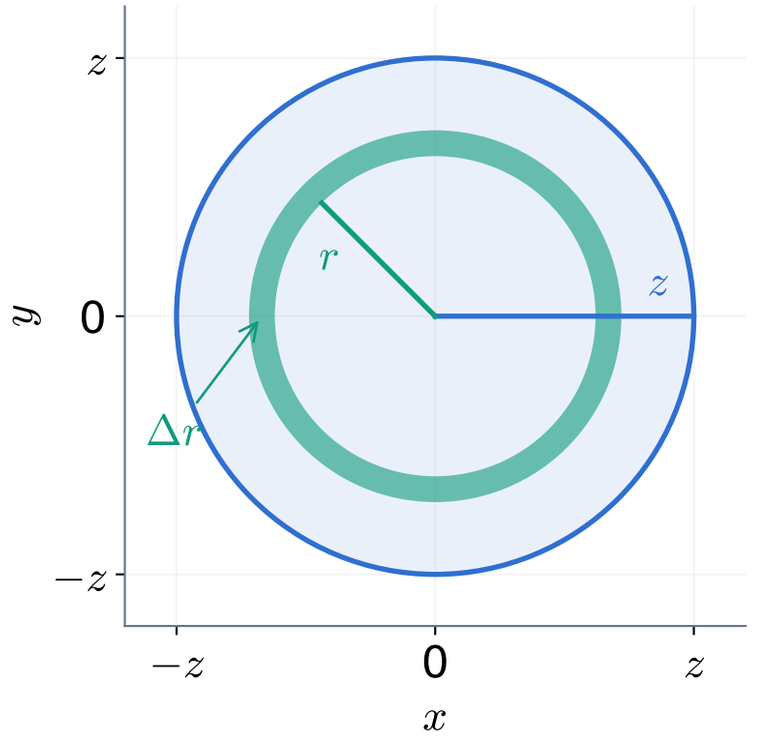
$$\{Z\le z\}=\{X^2+Y^2\le z^2\}.$$

计算目标

$$F_Z(z)=\iint_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)}\,dx\,dy.$$

联合密度仅由到原点的距离决定，可按半径相同的圆环分层积分。

第6题：按同心圆环汇总概率



半径 r 附近的薄圆环

圆环面积为

$$\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2 \approx 2\pi r\,\Delta r.$$

圆环上的密度约为

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}.$$

令圆环宽度趋于零，将半径从 0 到 z 的各层概率相加：

$$F_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}\,2\pi r\,dr, \qquad z\ge 0.$$

第6题：积分后求导，得到瑞利密度

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_0^z \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)}\, dr \\
&= \left[-e^{-r^2/(2\sigma^2)} \right]_0^z = 1 - e^{-z^2/(2\sigma^2)}, \qquad z \geq 0.
\end{aligned}
$$

结合 $z < 0$ 时 $F_Z(z) = 0$，对分布函数求导，得到

结果

$$
\boxed{
f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}
}
$$

圆环的面积因素

半径越大，相同宽度的圆环面积越大。积分中的 $2\pi r$ 来自圆周长；遗漏这一项会得到错误的距离分布。

3-5 第9题：由联合分布表求条件概率与函数分布

教材 P87 · 已知联合分布律如下，**列对应 X，行对应 Y**。

$Y\backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

1. 求 $P(X=2 \mid Y=2)$、$P(Y=3 \mid X=0)$；
2. 求 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布律；
3. 求 $V=\min\{X,Y\}$ 的分布律；
4. 求 $W=X+Y$ 的分布律。

第9题（1）：在指定行或列中计算条件概率

给定 $Y=2$：使用 $Y=2$ 这一行

$$P(Y=2)=0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.06=0.25.$$

$$\boxed{P(X=2\mid Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{5}}$$

给定 $X=0$：使用 $X=0$ 这一列

$$P(X=0)=0+0.01+0.01+0.01=0.03.$$

$$\boxed{P(Y=3\mid X=0)=\frac{P(X=0,Y=3)}{P(X=0)}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3}}$$

第9题（2）：最大值等于 u 的格子

$\max(X,Y)=2$

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

不重叠的两部分

$$\{U=u\}=\{X=u,Y\le u\}\cup\{Y=u,X<u\}.$$

前一部分包含 (u,u)，后一部分使用严格不等号，从而避免重复计数。

例如 $u=2$

$$\begin{aligned}P(U=2)&=(0.03+0.04+0.05)\\&\quad+(0.01+0.03)\\&=0.16.\end{aligned}$$

第9题（2）：最大值的完整分布律

u	所汇总的概率	结果
0	0	0
1	0.01+0.01+0.02	0.04
2	0.03+0.04+0.05+0.01+0.03	0.16
3	0.05+0.05+0.05+0.06+0.01+0.02+0.04	0.28
4	0.07+0.06+0.05+0.06	0.24
5	0.09+0.08+0.06+0.05	0.28

分布律

u	1	2	3	4	5
$P(U=u)$	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

其他取值的概率为 0。由于 $Y \le 3$，$U=4$、$U=5$ 分别由 $X=4$、$X=5$ 的整列给出。

第9题（3）：最小值等于 v 的格子

$\min(X,Y)=2$

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

不重叠的两部分

$$\{V=v\}=\{X=v,Y\geq v\}\cup\{Y=v,X>v\}.$$

最小值等于 v 要求两个变量均不小于 v，且至少一个等于 v。

例如 $v=2$

$$\begin{aligned}P(V=2)&=(0.05+0.04)\\&\quad+(0.05+0.05+0.06)\\&=0.25.\end{aligned}$$

第9题（3）：最小值的完整分布律

v	所汇总的概率	结果
0	(0+0.01+0.01+0.01)+(0.01+0.03+0.05+0.07+0.09)	0.28
1	(0.02+0.03+0.02)+(0.04+0.05+0.06+0.08)	0.30
2	(0.05+0.04)+(0.05+0.05+0.06)	0.25
3	0.06+0.06+0.05	0.17

分布律

v	0	1	2	3
$P(V=v)$	0.28	0.30	0.25	0.17

其他取值的概率为 0。由于 $Y \leq 3$，最小值不可能超过 3。

第9题（4）：沿 $x+y=w$ 汇总联合概率

$X+Y=4$

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

对相同函数值的原始取值求和

$$P(W=w)=\sum_{x+y=w} P(X=x,Y=y).$$

例如 $w=4$

$$\begin{aligned} P(W=4) &= P(X=4,Y=0) \\ &\quad + P(X=3,Y=1) \\ &\quad + P(X=2,Y=2) \\ &\quad + P(X=1,Y=3) \\ &= 0.07+0.05+0.05+0.02 \\ &= 0.19. \end{aligned}$$

第9题（4）：和的完整分布律

w	所汇总的概率	$P(W=w)$
0	0	0
1	0.01+0.01	0.02
2	0.03+0.02+0.01	0.06
3	0.05+0.04+0.03+0.01	0.13
4	0.07+0.05+0.05+0.02	0.19
5	0.09+0.06+0.05+0.04	0.24
6	0.08+0.05+0.06	0.19
7	0.06+0.06	0.12
8	0.05	0.05

其他取值的概率为 0。表中各项概率之和为 1。